Klausur zur Vorlesung “Lineare Algebra II”
SS 2017

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Max. Punktzahl	5	6	6	4	6	5	32
Erreichte Punktzahl							

Bemerkungen und Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **120** Minuten.
- Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein eigenes Blatt.
- “Schmierzettel” und Nebenrechnungen müssen nicht mit abgegeben werden.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen, insbesondere keine Bücher, Vorlesungs- oder Übungsmitschriften. Sie dürfen kein elektronisches Gerät an Ihrem Arbeitsplatz haben.
- Alle Lösungen sind zu begründen. Sie können sich auf alle Aussagen der Vorlesung berufen.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

a) Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Geben Sie die Definition der algebraischen Vielfachheit von λ und der geometrischen Vielfachheit von λ. In welcher Beziehung stehen diese Vielfachheiten? In welcher Beziehung stehen diese Vielfachheiten für einen diagonalisierbaren Endomorphismus?

b) Geben Sie die Definition einer hermiteschen Sesquilinearform auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V.

c) Geben Sie den in der Vorlesung formulierten Satz von Cayley-Hamilton an.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Betrachtet wird der Endomorphismus

$$f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_4).$$

a) Zeigen Sie, daß es eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{Q}^4$ gibt, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist. Bestimmen Sie so eine Basis $\mathcal{A}$ und die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$.

b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von f.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

diagonalisierbar? Wenn ja, so geben Sie alle Diagonalmatrizen $D \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ an, die ähnlich zu A sind.

b) Gibt es eine Matrix $A \in O(3)$, deren erster Zeilenvektor gleich $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ und deren zweiter Zeilenvektor gleich $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$ ist? Wenn ja, so geben Sie die Anzahl dieser Matrizen $A \in O(3)$ an.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Betrachtet wird die Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$

$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)) \mapsto 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3.$

a) Zeigen Sie, daß b symmetrisch ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis (v_1, v_2, v_3) von $(\mathbb{R}^3, b)$ mit $b(v_i, v_i) \in \{-1, 0, 1\}$ für $i = 1, 2, 3$.

c) Gibt es ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $b(x, x) < 0$? Ist b nicht ausgeartet?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $f \in \mathrm{End}(V)$.

a) Folgern Sie aus der Definitionseigenschaft eines selbstadjungierten Endomorphismus: Ist $f : (V, \langle\ ,\ \rangle) \to (V, \langle\ ,\ \rangle)$ selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f, so ist $\overline{\lambda} = \lambda$ (d.h. λ ist reell).

b) Zeigen Sie: f ist selbstadjungiert und unitär genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ bestehend aus Eigenvektoren von f gibt und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Sei (V, b) ein endlich erzeugter symmetrischer bilinearer Raum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Sind U und W Untervektorräume von V mit $V = U \perp W$ und $b\,|_U$ nicht ausgeartet und $b\,|_W = 0$, so gilt $W = \mathrm{Rad}(V, b)$.

b) Es gibt Untervektorräume U, W von V, so daß $V = U \perp W$ und $b\,|_U$ nicht ausgeartet und $b\,|_W = 0$.